0.1 Symmetric Spectrum

Definition 0.1.1

$X = \{X_n, \sigma_n\}_{n \geqq 0}$ が symmetric spectrum とは、$X \in \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}$ であり、対称群の作用が与えられたものである。つまり、$n, m \geqq 0$, $\tau \in \Sigma_n$ に対し、

$$\begin{tikzcd}
S^n \wedge X_m = (S^1_1 \wedge S^1_2 \wedge \cdots \wedge S^1_n) \wedge X_m \arrow[r, "\sigma^n"] \arrow[d, "\tau\wedge 1"'] & X_{n+m} \arrow[d, "="'] \\
S^n \wedge X_m = (S^1_{\tau(1)} \wedge S^1_{\tau(2)} \wedge \cdots \wedge S^1_{\tau(n)}) \wedge X_m \arrow[r, "\sigma^n"'] & X_{n+m}
\end{tikzcd}$$

が可換になる。

X, Y を symmetric spectrum としたとき、symmetric spectrum の写像 $f : X \longrightarrow Y$ とは、spectrum の写像であり、各 f_n は Σ_n-equivalent である。つまり、

$$\begin{tikzcd}
S^n \wedge X_0 = (S^1_1 \wedge S^1_2 \wedge \cdots \wedge S^1_n) \wedge X_0 \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\tau\wedge 1"'] & Y_n \arrow[d, "="'] \\
S^n \wedge X_0 = (S^1_{\tau(1)} \wedge S^1_{\tau(2)} \wedge \cdots \wedge S^1_{\tau(n)}) \wedge X_0 \arrow[r, "f_n"'] & Y_n
\end{tikzcd}$$

symmetric spectrum の圏を Sp^{Σ} と書く。このとき、forgetfull functor

$$U : \mathrm{Sp}^{\Sigma} \longrightarrow \mathrm{Sp}^{\Sigma}$$

は underlying functor と呼ばれる。

Example 0.1.2

S^0 : Sphere spectrum は symmetric suspension spectrum である。

Definition 0.1.3

$Ev_n : \mathrm{Sp}^\Sigma \longrightarrow \mathbf{TOP}_*$ を $Ev_n(X) = X_n$ で定義し、evaluation functor と呼ぶ。また、Kan extension を用いてこの left adjoint と、right adjoint をそれぞれ、

$$F_n \ , \ M_n : \mathbf{TOP}_* \longrightarrow \mathrm{Sp}^\Sigma$$

と書くことにする。

Proposition 0.1.4

Sp^Σ は任意の limit と colimit で閉じている。

Definition 0.1.5

$\Sigma : \mathrm{Sp}^\Sigma \longrightarrow \mathrm{Sp}^\Sigma$ を $(\Sigma X)_n = \Sigma X_n$、structure map を

$$\Sigma(\sigma) : \Sigma(\Sigma X)_n = \Sigma(\Sigma X_n) \longrightarrow (\Sigma X)_{n+1} = \Sigma X_{n+1}$$

で定義する。同様に、$\Omega : \mathrm{Sp}^\Sigma \longrightarrow \mathrm{Sp}^\Sigma$ を $(\Omega X)_n = \Omega X_n$、structure map を

$$\Omega(\widetilde{\sigma}) : (\Omega X)_n = \Omega X_n \longrightarrow \Omega(\Omega X)_{n+1} = \Omega(\Omega X_{n+1})$$

Proposition 0.1.6

$$\Sigma : \mathrm{Sp}^\Sigma \Longleftarrow \mathrm{Sp}^\Sigma : \Omega$$

Definition 0.1.7

$f \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Sp}^\Sigma)$ に対し、これが level equivalence（cofibration、fibration）であるとは、各 $n \leqq 0$ において、f_n が位相空間における weak equivalence（cofibration、fibration）とする。また、f が任意の acyclic fibration に対し LLP を持つとき、f を peojective cofibration と呼ぶ。

Theorem 0.1.8

$\mathbf{TOP}_*$ の generationg cofibration、acyclic cofibration をそれぞれ I, J としたとき、Sp^Σ の morphism の集合として、

$$I' = \bigcup_{n \geqq 0} F_n(I) \quad , \quad J' = \bigcup_{n \geqq 0} F_n(J)$$

と定義する。このとき、Sp^Σ の morphism の指定を、

1. weak equivalence is level equivalence
2. fibration is level fibration
3. cofibration is projective cofibration

と定義すれば、これにより Sp^{Σ} は I', J' を generating cofibration、acyclic cofibration をする cofibrantly generated model category となる。この model 構造を level（projective） model structure と呼ぶ。実はこのほかにも stable model structure と呼ばれる model 構造も考えられる。

Remmark 0.1.9

E を Ω-spectrum としたとき、

$$E^* : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

を $E^*(X) = [X, E]$ と定義し、spectrum におけるコホモロジーと呼んでいる。ただし $[A, B]$ とは、$f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\mathbf{N}}}(A, B)$ に対し、homotopic という同値関係を、

$$^{\exists}H : A \wedge I_+ \longrightarrow B$$

s.t $H_0 = f, H_1 = g$ で定義したときの類である。このとき、Brown 表現定理により

$$\mathbf{TOP}_* \xrightarrow{F_0} \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \xrightarrow{E^*} \mathbf{Ab}$$

は general cohomology であり、特に $E = K(\pi, n)$、つまり Eilenberg MacLAne spectrum のとき cohomology theory である。

Definition 0.1.10

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}^{\Sigma}}(X, Y)$ が

1. stable equivalence であるとは、任意の Ω-spectrum である E に対し、$E^0(f)$ が isomorphism である。
2. stable cofibration であるとは、任意の acyclic level fibration に対し LLP を持つことである。
3. stable fibration であるとは、任意の stable acyclic cofibration（stable equivalence かつ stable cofibration）に対し RLP を持つことである。

Theorem 0.1.11

Sp^{Σ} は以下の morphism の指定で model category となる。

1. weak equivalence is stable equivalence
2. cofibration is stable cofibration
3. fibration is stable fibration

この構造を stable model structure と呼ぶ。

Lemma 0.1.12

stable trivial fibration と level trivial fibration は同じである。

Theorem 0.1.13

$V : \mathrm{Sp}^{\mathbf{N}} \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}^{\Sigma} : U$ は Quillen equivalence in stable model model category